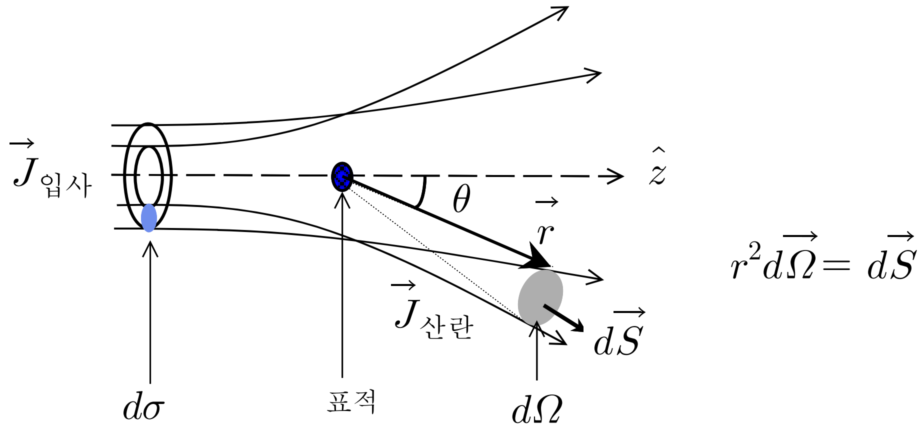
제14장 산란 (Scattering)

우리는 어떤 물질이나 입자의 특성을 파악하고자 할 때, 흔히 해당 물질이나 입자를 표적(target)으로 삼아 우리가 이미 그 특성을 알고 있는 입자들을 쏘아 산란(scattering)시키는 방법을 사용한다. 그 전형적인 예가 바로 금(gold) 박막에 알파선을 쏜 러더퍼드(E. Rutherford)의 산란실험이다. 그전까지의 톰슨(J.J. Thompson) 원자모형은 원자의 양전하가 구 형태로 퍼져있는 공간에 음전하들이 마치 건포도식빵 안의 건포도처럼 점점이 놓여 있다고 생각하였다. 이 경우 헬륨 원자핵인 무거운 알파선들은 퍼져있는 양전하에 의하여 크게 휘어지는 것이 불가능하다. 그러나 실제 산란 실험의 결과는 일부 알파입자들이 크게 휘어지거나, 부딪혀 튕겨 나오는 경우도 보여주었으며, 이 결과를 설명하기 위하여 러더퍼드는 원자의 양전하가 중심에 단단한 뭉치(core)를 이루어 핵을 형성하고 있다는 소위 러더퍼드 원자모형을 제시하였다. 산란 과정에서 입사입자들은 표적에서 멀리 떨어져 있을 때는 아무런 구속이 없는 자유입자와 같고, 표적에 접근하면 서로 간의 상호작용에 의한 위치에너지의 영향을 받으며, 다시 표적에서 멀리 떨어지면 자유입자의 상태가 된다고 생각할 수 있다. 우리는 이 장에서 이와 같은 산란 과정을 슈뢰딩거 방정식을 사용하여 이론적으로 분석하고 산란의 단면적(scattering cross section)을 구하고자 한다.

14.1 산란 단면적과 부분파동 전개
(Scattering cross section and partial-wave expansion)



[그림1] 산란의 도식적 표현

입사입자들이 [그림1]에서처럼 표적에 대해 $-z$ 방향에서 $+z$ 방향으로 입사되고 표적은 원점에 위치해있다고 하자. 위 그림에서는 z 축에 평행하게 점선으로 표시한 화살표 외에는 산란되지 않은 입자들을 표시하지 않았지만 사실 대부분의 입사빔에 속한 입자들은 그처럼 표적을 그냥 통과한다. 위 그림에서는 도식적인 표현을 위하여 산란되는 입자들만 표현하였다. 이제 입체각 $d\vec{\Omega}$ 의 방향으로 산란되는 입사입자들의 개수를 dN 이라고 하면, 이는 산

란 확률전류밀도(scagttering probability current density) $\vec{J}_{산란}$ 으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$dN = \vec{J}_{산란} \cdot d\vec{S} = r^2 \vec{J}_{산란} \cdot d\vec{\Omega} = r^2 (J_{산란})_r \, d\Omega$$

그리고 주어진 입체각 $d\vec{\Omega}$ 의 방향으로 나중에 산란되는 입사입자들의 표적에 근접하기 전의 통과 단면적을 $d\sigma$ 라고 하면, dN 은 다시 입사 확률전류밀도(incident probability current density) $\vec{J}_{입사}$ 로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$dN = \vec{J}_{입사} \cdot d\vec{\sigma} = (J_{입사})_z \, d\sigma$$

이제 산란의 미분단면적(differential cross section) $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 \frac{(J_{산란})_r}{(J_{입사})_z}$$

여기서 입사입자들은 자유입자이므로 $\phi_{입사} = e^{ikz}$ 로 그리고 산란입자들은 표적에서 멀리 떨어지게 되면 다시 자유입자가 되어 방사상으로 퍼지게 될 것이지만, 표적을 지날 때의 상호작용에 의한 영향으로 z 축으로부터의 각 θ 에 의존하게 될 것이므로 다음과 같이 쓸 수 있다. 여기서 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ 로 자유입자의 파수를 나타낸다.

$$\phi_{산란} = f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad \text{--------} \quad (1.1)$$

이때 $f(\theta)$ 는 산란 진폭(scattering amplitude)이라고 한다. 이제 확률전류밀도 $\vec{J}$ 의 공식,

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}(\phi^* \vec{\nabla}\phi - \phi \vec{\nabla}\phi^*)$$

에 위의 파동함수들을 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$(\vec{J}_{입사})_z = \frac{\hbar k}{m} \quad , \quad (\vec{J}_{산란})_r = \frac{\hbar k}{mr^2}|f(\theta)|^2$$

그러므로 우리는 다음과 같은 산란의 미분단면적 공식을 얻는다.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \qquad \text{---------} \ (1.2)$$

한편, 표적을 통과하여 나가는 전체 빔에 대한 파동함수는 산란되지 않은 입자들과 산란된 입자들의 합이 될 것이므로 다음과 같이 쓸 수 있을 것이다.

$$\phi(r,\theta) = e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr} \qquad \text{--------} \quad (1.3)$$

이제 슈뢰딩거 방정식을 써서 이러한 나가는 파동함수(outgoing wave function)의 표현을 구하고 이로부터 미분단면적을 주는 $f(\theta)$ 를 구해 보도록 하자.

다음 관계를 사용하면, $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR_l(r)}{dr}\right] = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[rR_l(r)\right]$, 7장에서 얻은 구면좌표계에서의 지름(radial) 슈뢰딩거 방정식은 위치에너지가 $V(r)$ 일 때 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[rR_l(r)] + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2mV(r)}{\hbar^2}\right]R_l(r) = 0$$

산란의 경우 표적에서 멀리 떨어진($r \to \infty$) 들어가는 영역 및 나가는 영역에서는 자유입자의 상태로 존재한다고 가정하면 위치에너지는 $V \to 0$으로 놓을 수 있을 것이다. 이러한 경우 지름 슈뢰딩거 방정식은 $kr \equiv \rho$ 로 놓으면

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + (1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2})R = 0$$

이 되어 그 해가 구면베셀함수 $j_l(\rho)$와 구면노이만함수 $n_l(\rho)$로 주어짐을 7장에서 보았다. 그러므로 표적에서 멀리 떨어진 영역에서의 지름 파동함수는 $R_l(r) \sim A_l\, j_l(kr) + B_l\, n_l(kr)$과 같이 위 두 함수의 선형결합으로 쓸 수 있다. 한편 구면베셀 및 구면노이만 함수는 r이 매우 클 때 점근적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$j_l(kr) \sim \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr}\ , \qquad n_l(kr) \sim -\frac{\cos(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr}$$

그러므로 지름 파동함수는 선형결합의 계수들 A_l, B_l 를 위상변화(phase shift) δ_l을 써서 표현하면 점근적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_l(r) \sim \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)}{kr}$$

그리고 산란 후 전체 파동함수는 다음과 같이 쓸 수 있을 것이다.

$$\phi_k(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l\, R_l(r)\, P_l(\cos\theta)$$

여기서 l번째 항을 우리는 l번째 부분파동(l-th partial wave)이라고 하며, 산란 파동함수의 이러한 표현을 부분파동 전개(partial-wave expansion)라고 한다.
한편, 산란 후 파동함수는 위의 논의에 의하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi_k(r,\theta) = e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr} \qquad \text{------------} \quad (1.1)$$

이때 점근 영역($r \to \infty$)에서의 평면파는 다음 관계식으로 주어진다.

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l\, \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr}\, P_l(\cos\theta)$$

이는 $e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, j_l(kr)\, P_l(\cos\theta)$로 전개하면, $P_l(\cos\theta)$의 직교조건식 $\int_{-1}^{1} P_l\, P_{l'}\, dx = \frac{2\,\delta_{ll'}}{2l+1}$ 으로부터 $A_l\, j_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} e^{ikr\cos\theta} P_l(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$ 이 되는데 이를 부분적분으로 계산한 후 $1/r$ 항까지만 취하고, $1/r^2$ 이하의 항들을 무시하면 $A_l = (2l+1)\, i^l$ 이 됨을 통하여 알 수 있다.
그러므로 (1.1)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,i^l\,\frac{\sin(kr-\frac{l\pi}{2})}{kr}P_l(\cos\theta)\;+\;\frac{f(\theta)}{r}e^{ikr}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\,\frac{\sin(kr-\frac{l\pi}{2}+\delta_l)}{kr}\,P_l(\cos\theta)$$

이제 $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$의 관계를 써서 위 식을 e^{ikr}과 e^{-ikr}로 전개하여 각각의 계수를 비교하면 다음과 같다. 먼저 e^{-ikr}의 계수를 비교하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$c_l=(2l+1)\,i^l\,e^{i\delta_l}$$

다음으로 e^{ikr}의 계수를 비교하면 $f(\theta)$에 대한 다음 관계식을 얻는다.

$$f(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{k}\,(2l+1)\,e^{i\delta_l}\sin\delta_l\,P_l(\cos\theta)$$

여기서 δ_l은 궤도 각운동량 l에서의 파동함수의 위상변화를 의미한다.

이제 전체 산란단면적(total scattering cross section)은 $d\sigma=|f(\theta)|^2 d\Omega$의 관계를 써서 적분하면 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma=2\pi\int_0^{\pi}d\theta\,\sin\theta\,|f(\theta)|^2=\frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l$$

위에서 우리는 $\int_{-1}^{1}P_l\,P_{l'}\,dx=\frac{2\,\delta_{ll'}}{2l+1}$ 의 관계식을 사용하였다. 한편 앞에서 주어진 식에 의하면 $f(\theta=0)$는 $P_l(1)=1$의 관계를 쓰면 $f(0)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l$ 이므로 전체 산란단면적은 $f(0)$의 허수부와 다시 다음과 같은 관계로 쓸 수 있다.

$$\sigma=\frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,[f(0)]$$

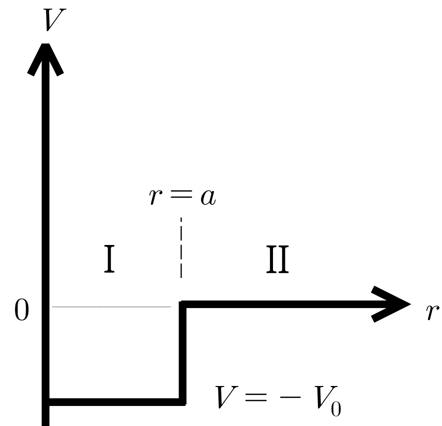
우리는 이 관계를 광학정리(optical theorem)라고 부른다.

• **구형 우물과 장벽 (Spherical well and barrier)**

이제 위치에너지가 다음과 같이 주어지는 반경이 a인 구형 우물의 경우에 입사입자의 에너지가 아주 작은 경우를 생각해 보겠다.

$$V(r)=\begin{cases}-V_0, & r<a\quad(V_0>0)\\ 0, & r>a\end{cases}$$

여기서 우리는 입사입자의 에너지가 아주 작아서 $ka\ll 1$의 조건이 성립하는 경우를 생각하겠다. 이 조건의 의미를 이해하기 위하여 먼저 궤도 각운동량 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$의 의미를 생각해보자. 운동량 p는 파수 k와 $p=\hbar k$의 관계에 있고, 입자가



[그림2] 구형 우물에 의한 산란

산란될 수 있는 최대 반경은 a 이므로 산란입자 $r=a$ 가 가질 수 있는 최대 궤도 각운동량은 $L \sim \hbar ka$ 이라고 할 수 있다. 한편, 양자역학적으로 연산자 $\vec{L}^2$ 의 고유값이 $l(l+1)\hbar^2$ 로 주어지므로 양자역학적인 각운동량은 대략 $l\hbar$ 의 값을 가진다고 할 수 있다. 이는 곧 $l\hbar \le \hbar ka$ 즉 $l \le ka$ 의 관계에 있음을 보여준다.

그러므로 입사에너지가 아주 작아서 $ka \ll 1$ 의 조건이 성립되는 경우에는 각운동량이 오직 $l=0$ 인 경우만 가능함을 알 수 있다. 이처럼 각운동량이 0 인 경우만 산란에 기여하는 경우를 우리는 S-파동 산란(S-wave scattering)이라고 한다.

이제 이러한 경우에 슈뢰딩거 방정식을 써서 구형 우물에 의한 산란을 분석해 보겠다. 먼저 지름 슈뢰딩거 방정식은 $l=0$ 을 대입하면 $r<a$ 와 $r>a$ 인 경우에 각각 다음과 같이 된다. 먼저 $r<a$ 인 경우를 생각하면,

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[rR]+\left[k^2+\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right]R=0$$

이 되어 $R(r)\equiv \dfrac{u(r)}{r}$ 로 놓고 $\dfrac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\equiv k_1^2$ 라고 하면 다음 방정식이 된다.

$$\frac{d^2u}{dr^2}+k_1^2u=0$$

이 경우 해를 u_I 으로 표시하면 이는 다음과 같이 주어진다.

$$u_I(r)=A\sin(k_1r)+B\cos(k_1r)\,,\quad r<a$$

다음으로 $r>a$ 인 경우 슈뢰딩거 방정식은

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[rR]+k^2R=0$$

이 되어 $R(r)\equiv \dfrac{u(r)}{r}$ 로 치환하면,

$$\frac{d^2u}{dr^2}+k^2u=0$$

이 되어 이 경우 해를 u_{II} 로 표시하면 그 해는 다음과 같다.

$$u_{II}(r)=C\sin(kr)+D\cos(kr)\,,\quad r>a$$

이제 지름 파동함수 R 은 $r=0$ 에서 유한한 값을 가져야 하므로, u_I 의 전개계수 중 $B=0$ 이 되어야 한다. 즉

$$u_I(r)=A\sin k_1r\,,\quad r<a$$

이 되어야 한다. 이에 맞추어 u_{II} 도 위상변화 δ_0 를 도입하여 sin 함수로 표현하겠다.

$$u_{II}(r)=C\sin(kr+\delta_0)\,,\quad r>a$$

한편 $r=a$ 에서 파동함수와 그 기울기는 연속이므로 다음의 경계조건이 만족되어야 한다.

$$u_I(a) = u_{II}(a)\ ,$$

$$\left.\frac{du_I}{dr}\right|_{r=a} = \left.\frac{du_{II}}{dr}\right|_{r=a}\ .$$

여기서 아래 경계조건식을 위 경계조건식으로 나누면

$$\left.\frac{d(\ln u_I)}{dr}\right|_{r=a} = \left.\frac{d(\ln u_{II})}{dr}\right|_{r=a}$$

이 되어 다음 관계식을 얻는다.

$$k_1 \frac{\cos k_1 a}{\sin k_1 a} = k \frac{\cos(ka+\delta_0)}{\sin(ka+\delta_{0)}}$$

그런데 처음 주어진 조건이 입사에너지가 아주 작다는 것이었으므로 우리는 $k \to 0$ 에 근접한다고 생각할 수 있다. 그런데 에너지가 아주 작아지더라도 k_1 은 0 이 되지 않으므로 모순이 없으려면 우변의 분모 $\sin(ka+\delta_0)$ 가 0 이 되어야 한다. 즉, $k\,a+\delta_0 \to 0$ 이 됨을 의미한다. 이러한 경우에 위 관계식을 다시 쓰면

$$k_1 \cot k_1 a \simeq \frac{k}{k\,a+\delta_0}$$

이 되어 이로부터 위상변화 δ_0 를 구할 수 있다.

$$\delta_0 = k\,a\left(\frac{\tan k_1 a}{k_1\,a} - 1\right)$$

참고로 위에서 $k\,a+\delta_0 \to 0$ 이고, $k\,a \to 0$ 이므로 $\delta_0 \ll 1$ 임을 알 수 있다.

이로부터 전체 산란단면적 σ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 \simeq \frac{4\pi}{k^2}\delta_0^2 = 4\pi a^2\left(\frac{\tan k_1 a}{k_1 a} - 1\right)^2$$

위 결과는 $k_1 a = \dfrac{\pi}{2}$ 가 되는 경우 발산하게 되어 맞지 않게 되는데, 원래 조건식

$$k_1 \frac{\cos k_1 a}{\sin k_1 a} = k \frac{\cos(ka+\delta_0)}{\sin(ka+\delta_{0)}}$$

에 의하면 좌변이 0 이 되므로 우변의 분자 $\cos(ka+\delta_0)$ 도 0 이 되어야 한다. 이 경우 우변의 분모 $\sin(ka+\delta_0)$ 는 1 이 되어야 하므로, $ka \ll 1$ 의 조건으로부터 $\sin\delta_0 \cong 1$ 이 됨을 알 수 있다. 즉 이 경우 전체 산란단면적은

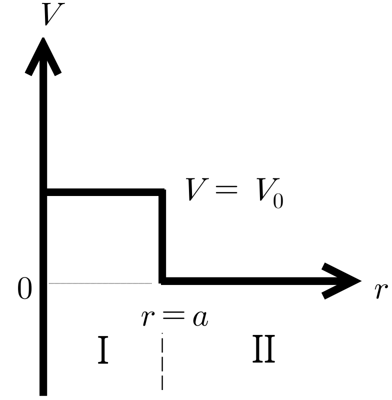
$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2}$$

이 되어 공명산란(resonant scattering) 현상이 일어난다. 이는 n 이 홀수인 $k_1 a = \dfrac{n\pi}{2}$ 의 조건이 만족될 때 항상 일어난다.

다음으로 장벽의 경우에 대해서 살펴보자. 이 경우 위치에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & r < a \quad (V_0 > 0) \\ 0, & r > a \end{cases}$$

이 경우도 입사입자의 에너지가 아주 작아서 $ka \ll 1$ 의 조건이 성립하는 경우를 생각하자. 우물의 경우와 비교하여 달라지는 것은 영역 I 에서 위치에너지가 $-V_0$ 에서 V_0 로 달라지므로 지름 부분 슈뢰딩거 방정식이 다음과 같이 된다.



[그림3] 구형 장벽에 의한 산란

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \left(k^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)R = 0\ ,\ k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}\ ,\ \ E - V_0 < 0$$

그러므로 $\dfrac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \equiv \kappa^2 > 0$ 으로 놓고 앞에서와 같이 $rR \equiv u$ 로 놓으면 영역 I 에서의 지름 슈뢰딩거 방정식은 다음과 같이 쓰여 진다.

$$\frac{1}{r}\frac{d^2u_I}{dr^2} - \kappa^2\frac{u_I}{r} = 0$$

그러므로 영역 I 에서의 파동함수는 sin이나 cos 함수가 sinh 과 cosh 함수로 바뀌게 되어 다음과 같이 주어진다.

$$u_I(r) = A\sinh(\kappa r) + B\cosh(\kappa r)$$

영역 II 의 경우에는 구형 우물의 경우와 동일하므로

$$u_{II}(r) = C\sin(kr + \delta_0)\ ,\quad r > a$$

앞에서와 동일하게 경계조건을 적용하면 다음의 조건식을 얻게 된다.

$$\kappa \coth \kappa a = k\cot(ka + \delta_0)$$

이 경우에도 $k \to 0$ 에 근접하므로, 앞과 동일한 논리로 우변의 분모 $\sin(ka + \delta_0)$ 가 0 이 되어야 한다. 즉, $ka + \delta_0 \to 0$ 이 되어야 하므로 위식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\kappa \coth \kappa a \simeq \frac{k}{ka + \delta_0}$$

이는 다시 $\delta_0 = ka\left(\dfrac{\tanh \kappa a}{\kappa a} - 1\right)$ 가 되어 $ka + \delta_0 \to 0$ 과 $ka \to 0$ 에서 $\delta_0 \ll 1$ 이 되어야 하므로 전체 산란단면적은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 \simeq \frac{4\pi}{k^2}\delta_0^2 = 4\pi a^2\left(\frac{\tanh \kappa a}{\kappa a} - 1\right)^2$$

구형 장벽에서 $V_0 \to \infty$ 가 되는 경우를 우리는 고전적으로 강체구(hard sphere)에 해당된다고 할 수 있을 것이다. 이 경우는 영역 I 에서 파동함수가 존재할 수 없으므로 $r = a$ 에서의 파동함수가 0 이 되어야 한다. 즉,

$$u_{II}(r = a) = C\sin(ka + \delta_0) = 0$$

이 되어 $\delta_0 = -ka$ 가 된다. 그러므로 이 경우 전체 산란단면적은

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\delta_0^2 = 4\pi a^2$$

이 된다. 이는 반지름 a 인 강체구의 고전적인 전체 산란단면적이 πa^2 인 것과 비교할 때 양자역학적인 산란단면적이 더 큼을 보여주며 이는 파동함수가 공간에 퍼져 있어 고전적으로 작용을 받지 않았던 영역에서도 작용을 받게 되기 때문이라고 생각할 수 있겠다.
